Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

9. Mai 2023

Zone A Nachmittag | **Zone B** Vormittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

2223 – 7128

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 24]

In dieser Aufgabe sollen Sie die Anzahl und Art der Schnittpunkte des Graphen von $y = \log_a x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ und der Geraden $y = x$ für bestimmte Werte von a untersuchen.

Bei dieser Aufgabe können Sie entweder die Formel für die Änderung der Logarithmusbasis $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ oder die Funktion „Logarithmus zu einer beliebigen Basis“ eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) verwenden.

Die Funktion f ist definiert durch

$$f(x) = \log_a x \text{ mit } x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1.$$

(a) Betrachten Sie die Fälle $a = 2$ und $a = 10$. Skizzieren Sie in ein und demselben Koordinatensystem die folgenden drei Graphen:

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_{10} x$$

$$y = x.$$

Beschriften Sie jeden Graphen deutlich mit seiner Gleichung und geben Sie den Wert jeden von Null verschiedenen x-Achsenabschnitts an. [4]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Betrachten Sie in den Teilen (b) und (c) den Fall $a = \mathrm{e}$. Beachten Sie, dass $\ln x \equiv \log_{\mathrm{e}} x$.

(b) Verwenden Sie die Infinitesimalrechnung, um den Minimalwert des Ausdrucks $x - \ln x$ zu finden, und zu begründen, dass es sich bei diesem Wert um einen Minimalwert handelt. [5]

(c) Deduzieren Sie daraus, dass $x > \ln x$ gilt. [1]

(d) Es existieren Werte von a für die der Graph von $y = \log_a x$ und die Gerade $y = x$ Schnittpunkte aufweisen. Die folgende Tabelle enthält drei Intervalle für den Wert von a.

Intervall	Anzahl der Schnittpunkte
$0 < a < 1$	p
$1 < a < 1{,}4$	q
$1{,}5 < a < 2$	r

Untersuchen Sie den Graphen von $y = \log_a x$ für unterschiedliche Werte von a, und notieren Sie die Werte von p, q und r. [4]

In den Teilen (e) und (f) sei $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Im Intervall $1{,}4 \leq a \leq 1{,}5$ gibt es einen Wert von a so, dass die Gerade $y = x$ eine Tangente an den Graphen von $y = \log_a x$ in einem Punkt P ist.

(e) Finden Sie die genauen Koordinaten von P und den genauen Wert von a. [8]

(f) Notieren Sie die genauen Werte für a so, dass die Graphen von $y = \log_a x$ und $y = x$

(i) zwei Schnittpunkte haben; [1]

(ii) keinen Schnittpunkt haben. [1]

2. [Maximale Punktzahl: 31]

In dieser Aufgabe sollen Sie lineare und quadratische Funktionen untersuchen, die systematisch mit Hilfe von arithmetischen Folgen (AF) konstruiert werden.

Betrachten Sie die Funktion $L(x) = mx + c$ für $x \in \mathbb{R}$ mit m, $c \in \mathbb{R}$ und m, $c \neq 0$.

$r \in \mathbb{R}$ sei die Lösung von $L(x) = 0$.

Wenn m, r und c, in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge bilden, dann wird $L(x)$ als AF-lineare Funktion bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $L(x) = 2x - 1$ eine AF-lineare Funktion ist. [2]

Betrachten Sie wieder $L(x) = mx + c$.

(b) (i) Zeigen Sie, dass $r = -\frac{c}{m}$. [1]

(ii) $L(x)$ sei eine AF-lineare Funktion. Zeigen Sie unter dieser Voraussetzung, dass $L(x) = mx - \frac{m^2}{m+2}$. [4]

(iii) Geben Sie alle weiteren Einschränkungen für den Wert von m an. [1]

Es gibt nur drei **ganzzahlige** Wertetripel für m, r und c, die jeweils eine AF-lineare Funktion ergeben. Eine davon ist $L(x) = -x - 1$.

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse von Teil (b) zur Bestimmung der beiden anderen AF-linearen Funktionen mit ganzzahligen Werten von m, r und c. [3]

Betrachten Sie die Funktion $Q(x) = ax^2 + bx + c$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und b, $c \in \mathbb{R}$.

r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ seien die Lösungen von $Q(x) = 0$.

(d) Notieren Sie einen Ausdruck für

(i) die Summe $r_1 + r_2$, der Lösungen, abhängig von a und b. [1]

(ii) das Produkt $r_1 r_2$, der Lösungen, abhängig von a und c. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Wenn a, r_1, b, r_2 und c, in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge bilden, dann wird $Q(x)$ als AF-quadratische Funktion bezeichnet.

(e) $Q(x)$ sei eine AF-quadratische Funktion.

(i) Notieren Sie einen Ausdruck für $r_2 - r_1$ in Abhängigkeit von a und b; [1]

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Antworten auf die Teile (d)(i) und (e)(i), dass
$r_1 = \dfrac{a^2 - ab - b}{2a}$; [2]

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus Teil (e)(ii), dass $b = 0$ oder $a = -\dfrac{1}{2}$ gilt. [3]

Betrachten Sie nun den Fall $b = 0$.

(f) Bestimmen Sie die beiden AF-quadratischen Funktionen, die diese Bedingung erfüllen. [5]

Betrachten Sie nun den Fall $a = -\dfrac{1}{2}$.

(g) (i) Finden Sie einen Ausdruck für r_1 abhängig von b. [2]

(ii) Bestimmen Sie damit oder auf andere Weise die genauen Werte von b und c so, dass sich AF-quadratische Funktionen ergeben.
Geben Sie Ihre Antworten in der Form $\dfrac{-p \pm q\sqrt{s}}{2}$ an, mit p, q, $s \in \mathbb{Z}^+$. [5]

Quellenangaben: